

8.2 Lineare Funktionen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff der direkten Proportionalitätsfunktion.

- 8.22** Ein Schwimmbecken fasst 48000 Liter Wasser. In das zunächst leere Becken fließen pro Stunde 8000 Liter Wasser zu. Wir betrachten die Funktion, die jedem Zeitpunkt t das Wasservolumen $V(t)$ im Becken zuordnet. Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an, wenn das Becken zu Beginn a) leer ist, b) bereits 16000 Liter Wasser enthält.

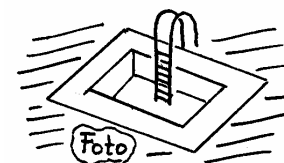


Abb.1

Lösung: Beachte, dass das Becken nach 6 Stunden voll ist.

a)

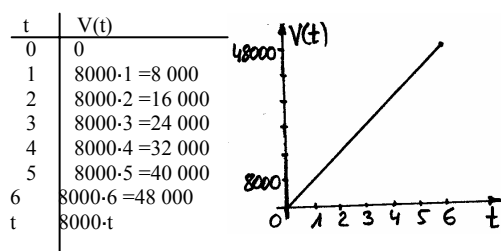


Abb.2

b)

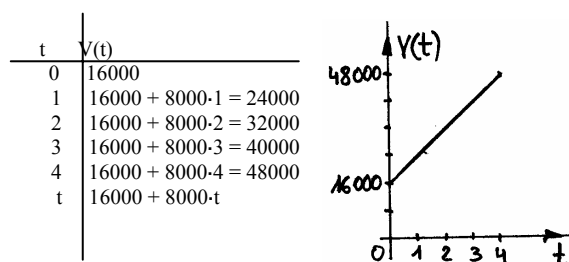


Abb.3

$$V(t) = 8000 \cdot t, \text{ wobei } t \in [0;6]$$

$$V(t) = 16000 + 8000 \cdot t, \text{ wobei } t \in [0;4]$$

Welche Zahlen für t eingesetzt werden dürfen, ist nicht ganz klar, weil nicht ganz klar ist, wie genau man einen Zeitpunkt t messen kann (bzw. soll). Wir wollen aber der Einfachheit halber annehmen, dass man für t in a) alle Zahlen aus dem Intervall $[0;6]$ und in b) alle Zahlen aus dem Intervall $[0;4]$ einsetzen darf.

- 8.23** Das vorhin betrachtete Becken ist voll, d.h. es befinden sich 48000 Liter Wasser darin. Da der Abfluss verstopft ist, muss das Becken ausgepumpt werden. Die Pumpe schafft 6000 Liter pro Stunde. Gib eine Termdarstellung der Funktion an, die jedem Zeitpunkt t das Wasservolumen $V(t)$ im Becken zuordnet, und zeichne ihren Graphen.

Lösung: $V(t) = 48000 - 6000 \cdot t$, wobei $t \in [0;8]$

Graph: Siehe Abb.4.

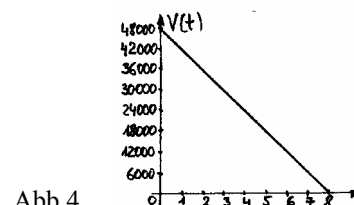


Abb.4

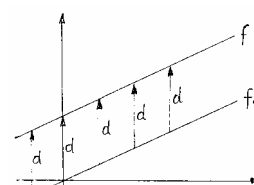
Die in den letzten beiden Aufgaben betrachteten Funktionen waren alle von der Form $V(t) = k \cdot t + d$, wobei k und d gewisse reelle Zahlen waren. (Gib selbst für jede der drei Funktionen an, wie groß k und d war.) Funktionen dieser Art haben einen eigenen Namen:

Definition: Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) heißt **lineare Funktion**.

In den obigen Aufgaben haben wir die eingezeichneten Punkte stets durch eine Gerade verbunden. Dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz: Der Graph einer reellen Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) ist eine Gerade.

Beweis: Wir wissen schon, dass der Graph der Funktion f_0 mit



$f_0(x) = k \cdot x$ eine Gerade g durch O ist. Wegen $f(x) = k \cdot x + d = f_0(x) + d$ erhält man den Graphen von f durch eine Parallelverschiebung der Geraden g um d in Richtung der zweiten Achse (nach oben, falls $d > 0$; nach unten, falls $d < 0$). Somit ist auch der Graph von f eine Gerade (siehe Abb. 5). \square

Abb.5

Dieser Satz erlaubt uns, den Graphen einer linearen Funktion auf eine einfache Weise zu zeichnen: Man ermittelt zwei Punkte des Graphen und verbindet diese durch eine Gerade.

Spezialfälle von linearen Funktionen

Für $d = 0$ oder $k = 0$ erhält man Spezialfälle von linearen Funktionen. Für $d = 0$ ergibt sich $f(x) = k \cdot x$, also eine direkte Proportionalitätsfunktion. Für $k = 0$ ergibt sich $f(x) = d$. In diesem Fall nimmt die Funktion f an jeder Stelle x den Wert d an, ihr Graph ist parallel zur ersten Achse (Abb.6). Eine solche Funktion nennt man eine **konstante Funktion**.

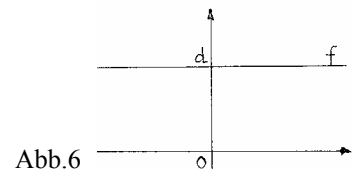


Abb.6

Grundaufgaben

8.24 Ermittle zwei Punkte des Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und zeichne den Graphen:

- | | | | |
|--------------------|---------------------|-------------------------|----------------|
| a) $f(x) = 2x + 1$ | c) $f(x) = 3x - 5$ | e) $f(x) = -0,5x + 0,5$ | g) $f(x) = 3$ |
| b) $f(x) = 2x - 3$ | d) $f(x) = -2x + 4$ | f) $f(x) = 0,5x - 2,5$ | h) $f(x) = -1$ |

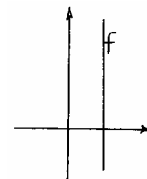
8.25 Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Achsen und zeichne damit den Graphen von f .

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ | c) $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$ | e) $f(x) = \frac{3}{4}x$ |
| b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ | d) $f(x) = -x - 1$ | f) $f(x) = -\frac{1}{6}x + 4$ |

8.28 Die Wertabnahme von Maschinen geht häufig nichtlinear vor sich (z.B. bei Autos). Das Finanzamt geht jedoch bei Steuerberechnungen meist von der Annahme aus, dass der Wert einer Maschine linear abnimmt (z.B. bei Computern). Eine Maschine koste 30 000 Euro und verliere jährlich 6000 Euro an Wert.

- Lege eine Tabelle an, die den Wert der Maschine 0,1,2,3,... Jahre nach dem Kauf angibt. Nach wie vielen Jahren ist der Wert der Maschine auf 0 abgesunken?
- Die Funktion W ordne jedem Zeitpunkt t (in Jahren nach dem Kauf) den Wert $W(t)$ der Maschine zu. Gib eine Termdarstellung der Funktion W an.
- Zeichne ein Punktdiagramm für die Funktion W . Ist es sinnvoll, die Punkte durch eine Gerade zu verbinden? Begründe.

8.29 Ist in Abb.7 der Graph einer linearen Funktion dargestellt? Begründe.



8.3 Die Steigung einer linearen Funktion

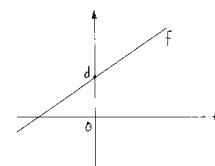
In diesem Abschnitt lernen wir, wie man die Zahlen k und d in der Termdarstellung einer linearen Funktion deuten kann.

Sei f eine lineare Funktion mit $f(x) = k \cdot x + d$. Was bedeuten die Zahlen k und d ?

Die Zahl d ist leicht zu deuten. Aus $f(0) = k \cdot 0 + d = d$ ergibt sich:

Die Zahl d ist der Funktionswert von f an der Stelle 0.

Der Graph von f schneidet die zweite Achse im Punkt $(0, d)$ (siehe Abb.1).



Da der Graph der Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ aus dem Graphen der Funktion f_0 mit $f_0(x) = k \cdot x$ nur durch eine Parallelverschiebung hervorgeht, ist die Zahl k auch für die Funktion f ein Maß dafür, wie stark f steigt (bzw. fällt). Man nennt daher k die **Steigung der linearen Funktion f** bzw. die **Steigung der entsprechenden Geraden**. In Abb.2 sind die Graphen der Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + 2$ für verschiedene Werte von k gezeichnet. Wie bei direkten Proportionalitätsfunktionen dreht sich der Graph von f mit zunehmendem k im Gegenuhrzeigersinn.

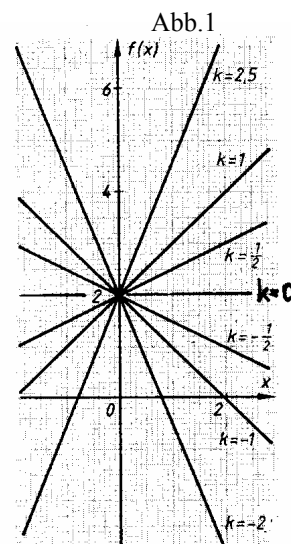


Abb.2

Satz: Ist f eine lineare Funktion mit $f(x) = k \cdot x + d$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $h \in \mathbb{R}^*$:

- (1) $f(x+1) - f(x) = k$
- (2) $f(x+h) - f(x) = k \cdot h$
- (3) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k$

Beweis:

- (1) $f(x+1) - f(x) = k \cdot (x+1) + d - (k \cdot x + d) = k \cdot x + k + d - k \cdot x - d = k$
- (2) $f(x+h) - f(x) = k \cdot (x+h) + d - (k \cdot x + d) = k \cdot x + k \cdot h + d - k \cdot x - d = k \cdot h$
- (3) folgt aus (2), indem man durch h dividiert. □

Fasst man diese Formeln in Worte, ergeben sich drei wichtige Deutungen der Steigung k :

Deutungen der Steigung

- (1) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Vermehrung des Arguments um 1 (*Einheitsdeutung der Steigung*).
- (2) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten (*Faktordeutung der Steigung*).
- (3) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente (*Verhältnisdeutung der Steigung*).

Die Formel (1) ist in Abb.3a, b veranschaulicht, die Formel (2) in Abb.4a,b, die Formel (3) in Abb.5a,b.

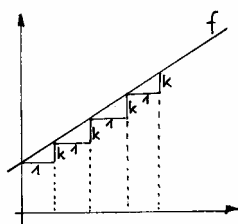


Abb.3a

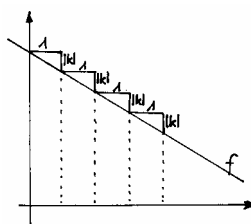


Abb.3b

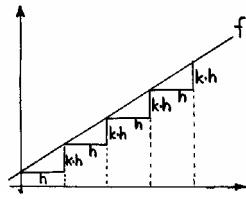


Abb. 4a

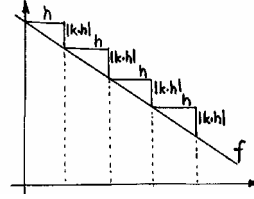


Abb. 4b

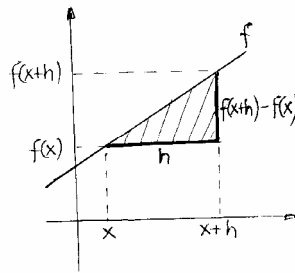


Abb. 5a

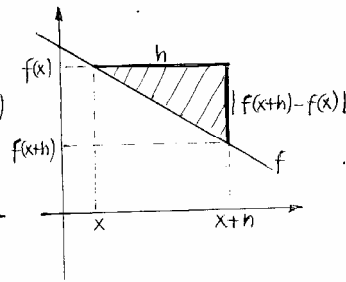


Abb. 5b